Examen blanc de Mathématiques

2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI

Contact : 0644127117/0708875223

Exercice 1

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) \quad z^3 - (1-\sqrt{2})z^2 + (1-\sqrt{2})z - 1 = 0$$

a) Vérifier que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z^3 - (1-\sqrt{2})z^2 + (1-\sqrt{2})z - 1 = (z-1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et D d'affixes respectives :

$$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i); \quad b = 1 \text{ et } d = a + 1$$

a) Déterminer la mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme le point B au point A

b) En déduire la nature du triangle OAB

c) Montrer que le point D est l'image du point B par la translation T du vecteur $\overline{OA}$

d) En déduire que le quadrilatère $OADB$ est un losange

3) On considère le point Ω d'affixe $\omega = \frac{a}{2}$ et soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$2|z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z = 0$$

a) Vérifier que les points O et A appartiennent à (Γ)

b) Montrer que (Γ) est un cercle dont on déterminera un diamètre

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1) a- Vérifier que :

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

b- Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}$$

Youssef SEMHI

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

a- Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 6$ puis écrire v_n en fonction de n.

b- Montrer que :

$$u_n = \frac{1}{2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

c- Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$w_n = e^{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

Exercice 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : $A(0, 2, 1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(2, 1, 1)$ et le plan (P) d'équation : $x + 2y - z + 3 = 0$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et calculer l'aire du triangle ABC

b) En déduire que : $x + 2y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Montrer que les plans (P) et (ABC) sont parallèles

2) Soit (S) la sphère tangente au plan (P) et tangente au plan (ABC) au point A

a) Calculer la distance $d(A, (P))$ puis en déduire que le rayon de la sphère (S) est $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P)

c) Vérifier que : $E(-1, 0, 2)$ est le point d'intersection de la droite (D) et du plan (P)

d) Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}\right)$

Exercice 4

Une urne contient trois boules blanches numérotées $0; 1; 2$ et deux boules noires numérotées $1; 2$ (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

— A : "Obtenir deux boules portant le numéro 1"

— B : "La première boule tirée est blanche"

a) Montrer que : $p(A) = \dfrac{1}{10}$

b) Calculer $p(B)$ et montrer que : $p(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Youssef SEMHI

2) Soit X la variable aléatoire qui représente le produit des nombres portés par les deux boules tirées.

a) Recopier et compléter le tableau suivant (en justifiant les réponses) :

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$				

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Problème :

Partie I

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2 + x + e^{-x}$$

1) a) Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

c) En déduire que $h(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

2) Soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$

a) Montrer que (Δ) est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $+\infty$

b) Étudier la position relative de (C) par rapport à (Δ)

3) Étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$

4) a) Montrer que : $f'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} h\left(-\frac{x}{2}\right)$ pour tout réel x

b) Dresser le tableau des variations de f

c) Montrer que l'équation $y = \frac{3}{2}x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

5) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α telle que :

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

6) a) Montrer que $f''(x) = \frac{(x-6)}{8} e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout réel x

Youssef SEMHI

b) En déduire que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées

7) Construire la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b) Calculer $(f^{-1})'(-1)$

c) Construire la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$

9) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\alpha$

a) Montrer que : $f(x)-\dfrac{x}{2}=1+e^{-\frac{x}{2}}-2f'(x)$ pour tout réel x

b) En déduire que : $\mathcal{A}=\dfrac{\alpha^2}{2-\alpha}\,\text{cm}^2$

Correction

Youssef SEMHI

Corrige exercice 1 :

1.a)

On doit vérifier que :

$$z^3-(1-\sqrt{2})z^2+(1-\sqrt{2})z-1=(z-1)(z^2+\sqrt{2}z+1)$$

On a :

$$\begin{aligned}(z-1)(z^2+\sqrt{2}z+1)&=z^3+\sqrt{2}z^2+z-z^2-\sqrt{2}z-1\\&=z^3+(\sqrt{2}-1)z^2+(1-\sqrt{2})z-1\\&=z^3-(1-\sqrt{2})z^2+(1-\sqrt{2})z-1\end{aligned}$$

1.b) Résolution de l'équation (E)

$$(E):(z-1)(z^2+\sqrt{2}z+1)=0$$

$z-1=0\Rightarrow z=1$

$z^2+\sqrt{2}z+1=0$

Le discriminant :

$$\Delta=(\sqrt{2})^2-4\times1\times1=2-4=-2$$

Les solutions sont :

$$z=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution finale :

$$\boxed{S=\left\{1,-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$$

2.a) Angle de la rotation R

Affixes :

$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b = 1$

La rotation R de centre O transforme B en A :

$$a = e^{i\theta} \times b \Rightarrow e^{i\theta} = a$$

L'angle θ vérifie :

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\theta = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]}$$

2.b) Nature du triangle OAB

on a :

$$OA = |a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$OB = |b| = 1$$

Le triangle OAB est isocèle en O avec :

$$\boxed{\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}}$$

2.c) Image de B par translation

D est défini par $d = a + 1$. La translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$ transforme B en :

$$b + a = 1 + a = d$$

Donc :

$$\boxed{D = T(B)}$$

2.d) Nature du quadrilatère OADB

On vérifie :

i) $OA = OB = AD = BD = 1$ (tous les côtés égaux)

ii) Les côtés opposés sont parallèles

$$\boxed{\text{OADB est un losange}}$$

3.a)

Équation de (T) :

$$2|z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z = 0$$

— Pour $z = 0$ (point O) : $0 = 0 \Rightarrow \boxed{O \in (T)}$

— Pour $z = a$ (point A) :

$$2|a|^2 - a\overline{a} - \overline{a}a = 2 \times 1 - 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A \in (T)}$$

Youssef SEMHI

3.b)

Réécriture de l'équation :

$$2z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z = 0$$

$$z\overline{z} - \frac{a}{2}\overline{z} - \frac{\overline{a}}{2}z = 0$$

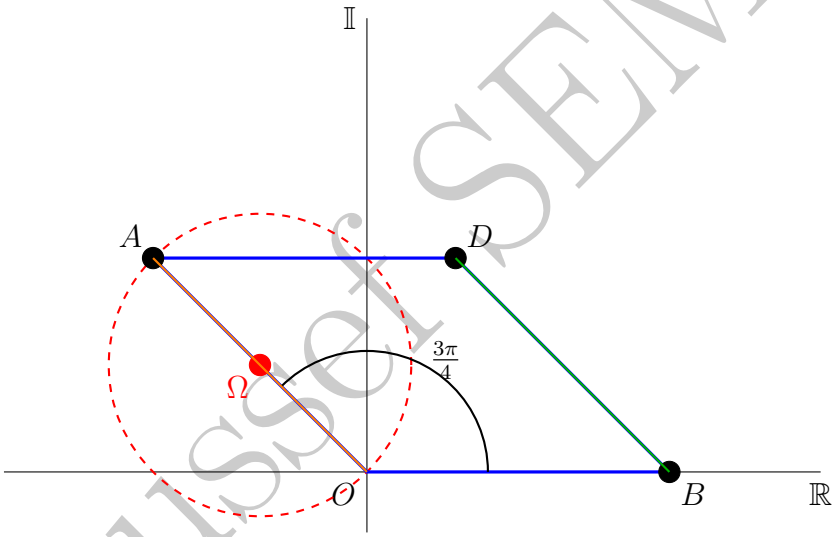
$$\left|z - \frac{\overline{a}}{2}\right|^2 = \left(\frac{|a|}{2}\right)^2$$

$$\left|z - \frac{\overline{a}}{2}\right| = \frac{|a|}{2}$$

C'est l'équation d'un cercle :

— Centre : Ω d'affixe $\boxed{\frac{\overline{a}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}}$

— Rayon : $\boxed{\frac{|a|}{2}}$



Youssef SEMHI

Corrige exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1) a)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 - \frac{1}{1+2u_n} = \frac{(1+2u_n)-1}{1+2u_n} = \frac{2u_n}{1+2u_n} = u_{n+1}.$$

conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+2u_n}.$$

b)

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{5}$ est vrais car $0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$.

Hérédité : Supposons $0 < u_n < \frac{1}{2}$. Alors :

1. Positivité de u_{n+1}

$$\begin{aligned} u_n &> 0 \\ 2u_n &> 0 \\ 1 + 2u_n &> 1 > 0 \\ \frac{2u_n}{1+2u_n} &> 0 \quad \text{(car quotient de nombres positifs)} \\ \text{Donc} \quad u_{n+1} &> 0 \end{aligned}$$

2. Majoration par $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} u_n &< \frac{1}{2} \\ 2u_n &< 1 \\ 1 + 2u_n &< 2 \\ \frac{1}{1+2u_n} &> \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{1+2u_n} &< \frac{-1}{2} \\ 1 + \frac{-1}{1+2u_n} &< 1 + \frac{-1}{2} \\ 1 - \frac{1}{1+2u_n} &< \frac{1}{2} \\ \text{Donc} \quad u_{n+1} &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Youssef SEMHI

Conclusion

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien :

$$0 < u_n < \frac{1}{2}$$

2) Convergence de la suite

Calcul de la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_{n+1} - u_n &= \dfrac{2u_n}{1+2u_n} - u_n \\ &= \dfrac{2u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} \\ &= \dfrac{2u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} \\ &= \dfrac{u_n(1-2u_n)}{1+2u_n} \end{cases}$$

Analyse du signe :

$u_n > 0$

$1 + 2u_n > 0$ (car $u_n > 0$)

$1 - 2u_n > 0$ (car $u_n < \frac{1}{2}$)

On en déduit :

$$\frac{u_n(1-2u_n)}{1+2u_n} > 0 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n > 0$$

Conclusion :

— La suite (u_n) est strictement croissante

— Elle est majorée par $\frac{1}{2}$

Donc (u_n) est convergente

3)

Soit (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}.$$

a)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1} \times \frac{2u_n - 1}{3^n u_n} \\ &= 3 \times \frac{u_{n+1}(2u_n-1)}{u_n(2u_{n+1}-1)} \quad \text{(en simplifiant les puissances de 3)} \\ &= 3 \times \frac{\left(\frac{2u_n}{1+2u_n}\right)(2u_n-1)}{u_n\left(2 \times \frac{2u_n}{1+2u_n} - 1\right)} \quad \text{(en substituant } u_{n+1}\text{)} \\ &= 3 \times \frac{\frac{2u_n(2u_n-1)}{1+2u_n}}{u_n\left(\frac{4u_n-(1+2u_n)}{1+2u_n}\right)} \\ &= 3 \times \frac{2u_n(2u_n-1)}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{u_n(2u_n-1)} \quad \text{(inversion du dénominateur)} \\ &= 3 \times \frac{2u_n(2u_n-1)}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{u_n(2u_n-1)} \quad \text{(simplification)} \\ &= 3 \times 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Youssef SEMHI

Ainsi, $v_{n+1} = 6v_n$ et $v_1 = -1$, donc :

$$v_n = -6^{n-1}.$$

On part de la définition de v_n :

$$v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$$

Multiplions les deux côtés par $(2u_n - 1)$:

$$u_n(2u_n - 1) = 3^n u_n$$

$$2u_n u_n - u_n = 3^n u_n$$

Regroupons les termes en u_n :

$$2u_n u_n - 3^n u_n = u_n$$

$$u_n(2u_n - 3^n) = u_n$$

On isole u_n :

$$u_n = \frac{u_n}{2u_n - 3^n}$$

Comme u_n est géométrique de raison 6 :

$$u_n = u_1 \times 6^{n-1} = -6^{n-1}$$

Substituons dans l'expression :

$$u_n = \frac{-6^{n-1}}{2(-6^{n-1}) - 3^n} = \frac{-6^{n-1}}{-2 \cdot 6^{n-1} - 3^n}$$

Multiplions numérateur et dénominateur par -1 :

$$u_n = \frac{6^{n-1}}{2 \cdot 6^{n-1} + 3^n}$$

Divisons numérateur et dénominateur par 6^{n-1} :

$$u_n = \frac{1}{2 + \frac{3^n}{6^{n-1}}}$$

Simplifions $\frac{3^n}{6^{n-1}}$:

$$\frac{3^n}{6^{n-1}} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (car\ \frac{3^n}{6^n} = (\frac{1}{2})^n)$$

On obtient donc :

$$u_n = \frac{1}{2 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

c) Suite (w_n)

Soit $w_n = e^{u_n}$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} w_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Youssef SEMHI

Corrige exercice 3 :

1.a)

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel est donné par :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\big[(-1)\times 0 - (-1)\times(-1)\big] \\ &\quad - \vec{j}\big[1\times 0 - (-1)\times 2\big] \\ &\quad + \vec{k}\big[1\times(-1) - (-1)\times 2\big] \\ &= \vec{i}(0-1) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1+2) \\ &= -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}$$

Aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

1.b) Équation du plan (ABC)

Le produit vectoriel donne un vecteur normal au plan :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Équation du plan :

$$-1(x-0) - 2(y-2) + 1(z-1) = 0$$

$$-x - 2y + 4 + z - 1 = 0$$

$$\boxed{x + 2y - z - 3 = 0}$$

Youssef SEMHI

1.c) Parallélisme des plans

Plans :

— (ABC) : $x + 2y - z - 3 = 0$

— (P) : $x + 2y - z + 3 = 0$

Vecteurs normaux :

$$\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs normaux sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

$$\boxed{(ABC) \parallel (P)}$$

2.a) Distance et rayon de la sphère

Distance de A à (P) :

$$d(A,(P)) = \frac{|0 + 2 \times 2 - 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

La sphère est tangente aux deux plans parallèles, donc son diamètre vaut cette distance.

$$\boxed{R = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

2.b) Droite perpendiculaire à (P)

Vecteur directeur de (D) : $\vec{n}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Représentation paramétrique :

$$\boxed{(D) : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

2.c)

On cherche t tel que :

$$t + 2(2 + 2t) - (1 - t) + 3 = 0$$

$$t + 4 + 4t - 1 + t + 3 = 0$$

$$6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Donc :

$$E \begin{cases} x = 0 + (-1) = -1 \\ y = 2 + 2(-1) = 0 \\ z = 1 - (-1) = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{E(-1, 0, 2)}$$

Youssef SEMHI

2.d) Centre de la sphère

Le centre Ω est au milieu de [AE] :

$$\Omega\left(\frac{0-1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$$

$$\boxed{\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)}$$

Vérification du rayon :

$$\|\overrightarrow{A\Omega}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Corrigé exercice 4

1) Probabilités des événements

L'urne contient 5 boules au total :

3 boules blanches numérotées 0, 1, 2

2 boules noires numérotées 1, 2

Nombre total de tirages possibles (sans remise, ordre important) :

$$A_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

a) Calcul de $P(A)$

Événement A : "Obtenir deux boules portant le numéro 1"
Il y a 2 boules portant le numéro 1 dans l'urne (une blanche et une noire).
Nombre de cas favorables :

$$A_2^2 = 2 \times 1 = 2$$

Probabilité :

$$P(A) = \frac{2}{20} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

b) Calcul de $P(B)$ et $P(A \cap B)$

Événement B : "La première boule tirée est blanche"
Nombre de cas favorables :

$$3 \times 4 = 12$$

(3 choix pour la première boule blanche, puis 4 boules restantes)

$$P(B) = \frac{12}{20} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Événement $A \cap B$: "La première boule est blanche ET les deux portent le numéro 1"
Seul cas possible : - Tirer d'abord la boule blanche numéro 1 - Puis tirer la boule noire numéro 1
Nombre de cas favorables : 1
Probabilité :

$$P(A \cap B) = \frac{1}{20} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

Youssef SEMHI

c) Indépendance des événements

On vérifie :

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50} \neq \frac{1}{20} = P(A \cap B)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Les événements A et B ne sont pas indépendants}}$$

2) Variable aléatoire X

a) Loi de probabilité de X

Produits possibles x_i : 0, 1, 2, 4

x_i	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

b) Espérance mathématique

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{10}$$

$$E(X) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10} + \frac{8}{10} + \frac{4}{10} = \frac{13}{10}$$

$$\boxed{E(X) = 1,3}$$

Corrigé problème

Partie I : Étude de la fonction h

1.a) Calcul de la dérivée

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = 2 + x + e^{-x}$$

$$h'(x) = 0 + 1 - e^{-x} = \boxed{1 - e^{-x}}$$

1.b) Variations de h

— Pour $x < 0$:

$$e^{-x} > 1 \Rightarrow h'(x) = 1 - e^{-x} < 0$$

Donc h est $\boxed{\textit{décroissante}}$ sur $]-\infty; 0]$.

— Pour $x > 0$:

$$e^{-x} < 1 \Rightarrow h'(x) = 1 - e^{-x} > 0$$

Donc h est $\boxed{\textit{croissante}}$ sur $[0; +\infty[$.

— En $x = 0$:

$$h'(0) = 1 - 1 = 0$$

Youssef SEMHI

1.c) Signe de h

Le minimum de h est atteint en $x = 0$:

$$h(0) = 2 + 0 + 1 = 3 > 0$$

Comme h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, elle reste toujours positive :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0}$$

Partie II : Étude de la fonction f

1. Calcul des limites

$$f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

— Limite en $-\infty$: Posons $X = -\frac{x}{2} \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} -X + (-X-1)e^X = \lim_{X\to+\infty} -X + (-X-1)e^X$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

— Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}} - e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$\lim_{X\to+\infty} X + \frac{1}{\frac{e^X}{X}} - e^{-X} = +\infty$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

2. Asymptote oblique (Δ)

a)

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \frac{x}{2}] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \frac{x}{2}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - \frac{x}{2}] = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} - e^{-X} = 0$$

Donc $\boxed{(\Delta) \text{ est asymptote à } (C) \text{ au voisigane de } +\infty}$

Youssef SEMHI

b) Position relative

$$f(x) - \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

— Pour $x > 2$: positif

— Pour $x < 2$: négatif

(C) est au-dessus de (Δ) sur $]2; +\infty[$ et en-dessous sur $]-\infty; 2[$

3. Branche infinie en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$$

Donc branche parabolique suivant l'axe des ordonne au voisinage de $-\infty$.

4)

a)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(2 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} + 2 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} h\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \text{où } h(X) = 2 + X + e^{-X} \end{aligned}$$

b) Tableau de variations

Comme $h > 0$ et $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est $\boxed{strictementcroissante}$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	

c) Tangente en $x = 0$

$$f(0) = 0 + (0 - 1) \times 1 = -1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \times 1 \times h(0) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Équation tangente :

$$y = \frac{3}{2}x - 1$$

$(T) : y = \frac{3}{2}x - 1$ est bien la tangente en $x = 0$

Youssef SEMHI

5) Point d'intersection avec Ox

$$f(1/2) \approx -0.46 < 0$$
$$f(1) \approx 0.21 > 0$$

Et puisque f est strictement croissant, Par le TVI, il existe un unique $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(1 - \frac{x}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$$
$$f''(x) = \frac{x-6}{8}e^{-\frac{x}{2}},$$
$$\boxed{f''(x) = \frac{x-6}{8}e^{-\frac{x}{2}}}$$

b)

La dérivée seconde s'annule en :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-6}{8}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow x = 6$$

Calcul de $f(6)$:

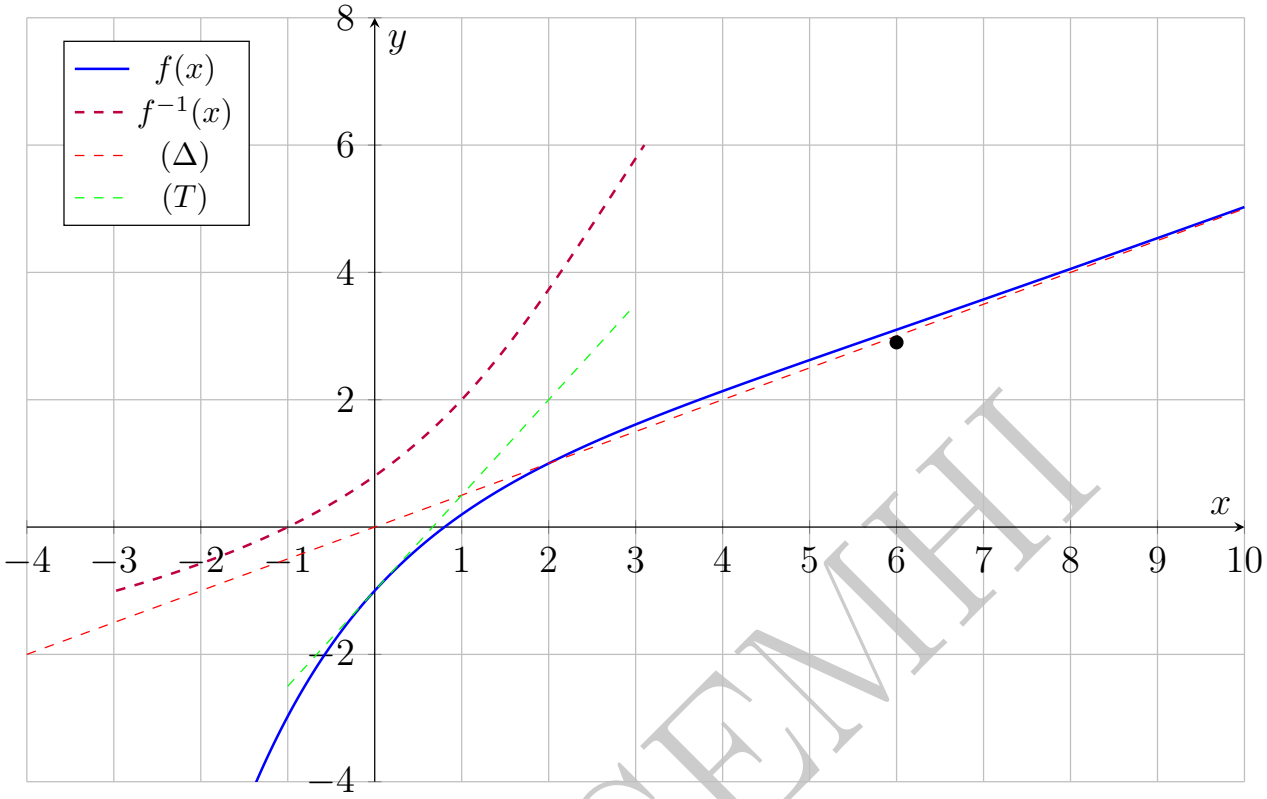
$$f(6) = \frac{6}{2} + \left(\frac{6}{2} - 1\right) e^{-3} = 3 + 2e^{-3}$$

La courbe (C) admet donc un point d'inflexion en :

$$\boxed{I\left(6,\, 3 + 2e^{-3}\right)}$$

Youssef SEMHI

7)



8)

a) On sait que :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}h\left(-\frac{x}{2}\right) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi, f est **strictement croissante** et **continue** sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calcul de $(f^{-1})'(-1)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{où} \quad y = f(x)$$

On cherche x tel que $f(x) = -1$. On reconnaît $f(0) = -1$.
Calculons $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{3}{2} \quad \text{(démontré précédemment)}$$

Donc :

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Youssef SEMHI

9)

a) on a :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2f'(x) = 1 + e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$1 + e^{-\frac{x}{2}} - 2f'(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{2} - 1\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

On a bien l'égalité : $\boxed{f(x) - \frac{x}{2} = 1 + e^{-\frac{x}{2}} - 2f'(x)}$

b) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$

L'aire est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} \left(1 + e^{-\frac{x}{2}} - 2f'(x)\right) dx$$

$$= \left[x - 2e^{-\frac{x}{2}} - 2f(x)\right]_0^{\alpha}$$

$$= \alpha - 2e^{-\frac{\alpha}{2}} - 2f(\alpha) - (0 - 2 - 2f(0))$$

Or $f(\alpha) = 0$ (car α est le point d'intersection avec l'axe des abscisses) et $f(0) = -1$:

$$\mathcal{A} = \alpha - 2e^{-\frac{\alpha}{2}} - 0 + 2 + 2$$

$$= \alpha + 4 - 2e^{-\frac{\alpha}{2}}$$

En utilisant l'expression de $f(\alpha) = 0$:

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) e^{-\frac{\alpha}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

En substituant :

$$\mathcal{A} = \alpha + 4 - 2\left(\frac{\alpha}{2 - \alpha}\right)$$

$$= \frac{\alpha(2 - \alpha) + 4(2 - \alpha) - 2\alpha}{2 - \alpha}$$

$$= \frac{2\alpha - \alpha^2 + 8 - 4\alpha - 2\alpha}{2 - \alpha}$$

$$= \frac{8 - 4\alpha - \alpha^2}{2 - \alpha}$$

Après simplification on obtient : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{\alpha^2}{2 - \alpha} \text{ cm}^2}$

Youssef SEMHI